EXAMEN DE FUNCIONES 2 BACHILLERATO

1. Elige una de estas dos funciones:

a) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}$ **b)** $f(x) = xe^{3/x}$

y completa los siguientes apartados:

- **Dominio y continuidad (0, 25)**
- **Cortes con los ejes (0, 25)**
- **Simetrías (0, 25)**
- **Asíntotas (0, 5)**
- **Intervalos de crecimiento y extremos absolutos y relativos (0, 5)**
- **Concavidad, convexidad y puntos de inflexión (0,5)**
- **Gráfica (0,5)**

COSME GARCIA ACADÉMICAS 30/03/2022

2. **Realizando previamente un estudio de las características que se indican, representa gráficamente la función:**

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- **Dominio de definición(0, 5)**
- **Cortes con los ejes de coordenadas y signo(1)**
- **Simetría(0, 5)**
- **Asíntotas(2)**
- **Estudio de la primera derivada (monotonía y extremos relativos)(2)**
- **Estudio de la segunda derivada (curvatura y puntos de inflexión(2)**
- **Gráfica(2)**

SAGASTA CCSS 21/02/2019

3. **Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa, en cientos de miles de euros, se ajustan a la función $f(x) = \frac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa (con x positivo).**

- **Representa la función ayudándote de las asíntotas y de los puntos de corte con los ejes.**
- **En qué año deja de tener pérdidas**
- **¿Se prevé que los beneficios de la empresa estén limitados? Si es así, en que cantidad**

SAGASTA CCSS 24/01/2022

4. **Determina las asíntotas oblicuas de la función**

$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ **y como se acerca la función a ellas.**

JORGE FERNANDEZ HORCA CCSS 22/03/2022

5. **Dada la función g(x) =** $\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}2x^2 + 6x + 1$

- **Calcula los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento**
- **Calcula los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad**

JORGE FERNANDEZ HORCA CCSS 22/03/2022

SOLUCIONES

1.

a) $\boldsymbol{f\,(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}}$

- Dominio y continuidad

Dom = $\mathbb{R}$ - $\{3\}$

Simetrías $f\,(-x) = \frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{x^2+4-4x}{-\,(x+3)} = \frac{(x-2)^2}{-\,(x+3)}$ No tiene

- Cortes con los ejes

Eje x: f (x) = 0 → $\frac{(x-2)^2}{x-3} = 0$ → $(x-2)^2 = 0$ → x = 2

Eje y: f (x) = $\frac{(0-2)^2}{0-3}$ = $\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$

- Signo

f(0)	2	f(4)
-		+

- Ramas Infinitas y asíntotas

Verticales: $\lim_{x \to 3} f\,(x) = \frac{(3-2)^2}{3-3} = \frac{1}{0} = \infty\; Si\ tiene\ en\ x = 3$

$\lim_{x \to 3^-} f\,(x) = -\,\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} f\,(x) = +\,\infty$

Horizontales:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{\infty}{\infty}$ Grado numerado es mayor, así que es infinito

No tiene.

Oblicuas:

m = $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3} : x = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty}$

Grados iguales → $\frac{1}{1} = 1 = m$

n = $\lim_{x \to \infty} [f(x) - m * x] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(x-2)^2}{x-3} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{(x-2)^2 - x^2 - 3x}{x-3}\right]$ =

$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 + 4 - 4x - x^2 + 3x}{x-3}\right]$ = $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{-x+4}{x-3}\right]$ = $\frac{\infty}{\infty}$

Grados iguales → $\frac{-1}{1} = -1$

Asíntota oblicua: y = x – 1

Otra forma de hacer las oblicuas en funciones racionales

$\frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-3}$ → $x^2 - 4x + 4 : x - 3 = x - 1\, resto\, 1$

Ramas parabólicas no tiene al tener oblicuas

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-3}$

$f´(x) = \frac{(2x-4)(x-3) - (x-2)^2\, 1}{(x-3)^2}$

$f´(x) = 0 \rightarrow \frac{(2x-4)(x-3) - (x-2)^2}{(x-3)^2} = 0$

$2x^2 - 6x - 4x + 12 - x^2 + 4x - 4 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ → x = $\frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

f´(0)	f´(2,5)	f´(5)
+↗	- ↘	+↗

2 4

f (2) = 0 → en el punto (2,0) hay un máximo relativo

f (4) = 4 → en el punto (4,4) hay un mínimo relativo

- Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x) - 6\,(x-3)^2 - (x^2 - 6x + 8)\,(2x - 6)}{(x-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 6}{(x-3)^4} = \frac{2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$$f''(x) = 0$$

2 = 0 No hay puntos de inflexión

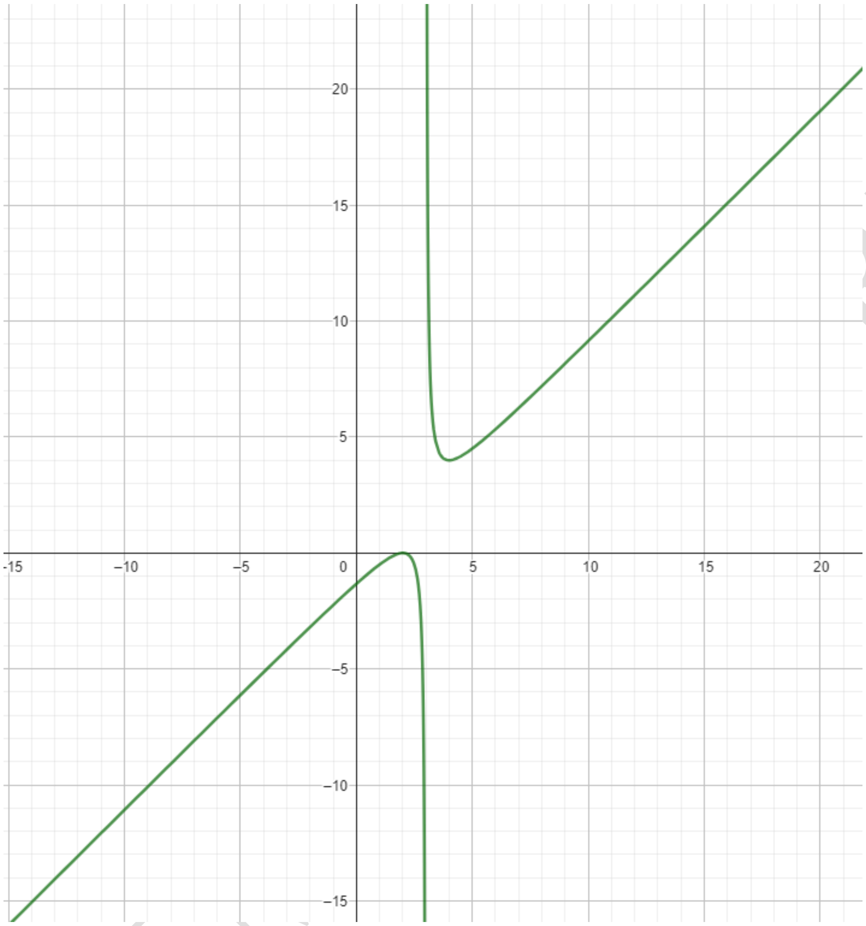
f´´(0) < 0 ∩

$f''(5) > 0$ ∪

En x = 3 es donde cambia la gráfica

(- ∞, 3) → convexa ; (3, + ∞) → cóncava

- Gráfica



b) $\boldsymbol{f(x) = xe^{3/x}}$

- Dominio

Dom = Al ser experiencial, hago el dominio del exponente $\frac{3}{x}$ → $\mathbb{R}$ - $\{0\}$

- Simetrías

Eje x: f(x) = 0 → $xe^{3/x}$ → no tiene

- Cortes con los ejes y signo

Eje x: f (x) = 0 → $xe^{3/x}$ = 0 → x = 0

$e^{3/x}$ = 0 No tiene solución

F(-1) 0 F(1)

\- +

- Ramas infinitas y asíntotas

Horizontales: $\lim_{x\to\infty} f\,(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} xe^{3/x} \;=\; \infty e^{3/x} \;= \infty e^{0} \;=\; \infty \;\; no\ tiene$

Verticales:

$$\lim_{x\to 0} f\,(x) \;=\; \lim_{x\to 0} xe^{3/x} \;=\; 0 * \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{e^{3/x}}} \;=\; \frac{0}{0} \rightarrow \text{L´hopital} \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{3e^{3/x}}{x^2}} \;=\; \frac{0}{\infty} = 0$$

Tiene en el x = 0

$$\lim_{x\to 0^-} f\,(x) \;=\; 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f\,(x) \;=\; +\,\infty$$

Es divergente

Oblicuas:

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f\,(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} f\,(x) \;=\; \frac{xe^{3/x}}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} e^{3/x} \;=\; 1$

n = $\lim_{x\to\infty} [f(x) - m * x] \;=\; \lim_{x\to\infty} \left[xe^{3/x} -\; x\,\right] \;=\; \lim_{x\to\infty} \left[x(e^{3/x} \;-\; 1)\,\right] = \infty * 0 =$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}}\right] = \frac{0}{0} = \;\; \rightarrow \text{L´hopital} \rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3e^{3/x}}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \;=\; \frac{3*1}{1} = 3$$

b = x + 3

Ramas parabólicas no tiene, al tener oblicuas.

- Monotonía, crecimiento y decrecimiento

f(x) = $xe^{3/x}$

f´(x) = $e^{3/x}$- $\frac{3xe^{3/x}}{x^2} = \frac{e^{3/x}\,(x-3)}{x}$ = 0 → $e^{3/x} \times (x^2 - 3)$ = 0

$e^{3/x} = 0$ No tiene solución

$x - 3 = 0$ → x = 3

f´(-1)	f´(2)	f´(4)
+↗	- ↘	+↗

0 3

Mínimo: (3, 3e); en el cero no hay máximo ya que no pertenece al dominio, pero si que hay un cambio de tendencia.

- Curvatura, concavidad y convexidad

f´´(x) = $\frac{9\,e^{3/x}}{x^3}$ → 9 $e^{3/x}$ = 0 → $e^{3/x}$ = 0 → sin solución

No tiene puntos de inflexión

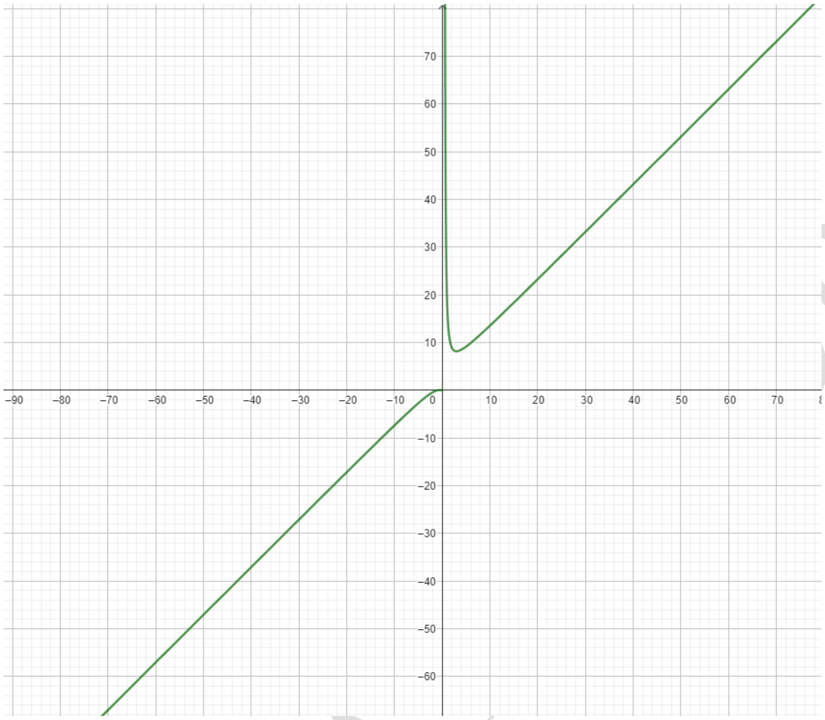
f´´(-1) < 0 ∩

$f''(1) > 0$ ∪

En x = 0 es donde cambia la gráfica

(- ∞, 0) → convexa ; (0, + ∞) → cóncava

- Gráfica.



70
60
50
40
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−90
−80
−70
−60
−50
−40
−30
−20
−10
0
10
20
30
40
50
60
70

2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}}$

- **Dominio** = $\mathbb{R}$ - $\{1\}$
- **Cortes:** Eje x: $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^3 = 0$ x = 0

  Eje y: f(0) = 0 y = 0
- **Simetría y signo:** f (-x) = $\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{-x^3}{(x+1)^2}$ No tiene

f (-1)	0	f (2)
-		+

- **Asíntotas:**

Verticales $\lim_{x\to1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x\to1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$ tiene en el x = 1

Horizontales $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \; No \; tiene$

Oblicuas m = $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} : x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1 = m$

n = $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{1} = 2$

Tiene: y = x + 2

Ramas infinitas no tiene

- **Monotonía y extremos relativos**

f´(x) = $\frac{3x^2\ (x^2-2x+1)-\ 3x^2\ \ (2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{3x^4\ -6x^3\ +\ 3\,x^3\ -2x^4-2x^3)}{(x-1)^4}$

f´(x) = $\frac{x^4\ -4x^3\ +\ 3\,x^2}{(x-1)^4} \rightarrow \frac{x^4\ -4x^3\ +\ 3\,x^2}{(x-1)^4} = \frac{x^2\ (x-1)(x-3)}{(x-1)^4} = \frac{x^2\ (x-3)}{(x-1)^3} = 0$

x = 0; x = 3

f´(-1)	f´(0,5)	f´ (2)	f´ (4)
+	+	-	+

0 1 3

En x = 1 no hay un máximo ya que no hay dominio

En x = 3 hay un mínimo (3, $\frac{27}{4}$)

- **Curvatura, puntos de inflexión**

f´´ (x) = 0 → x = o

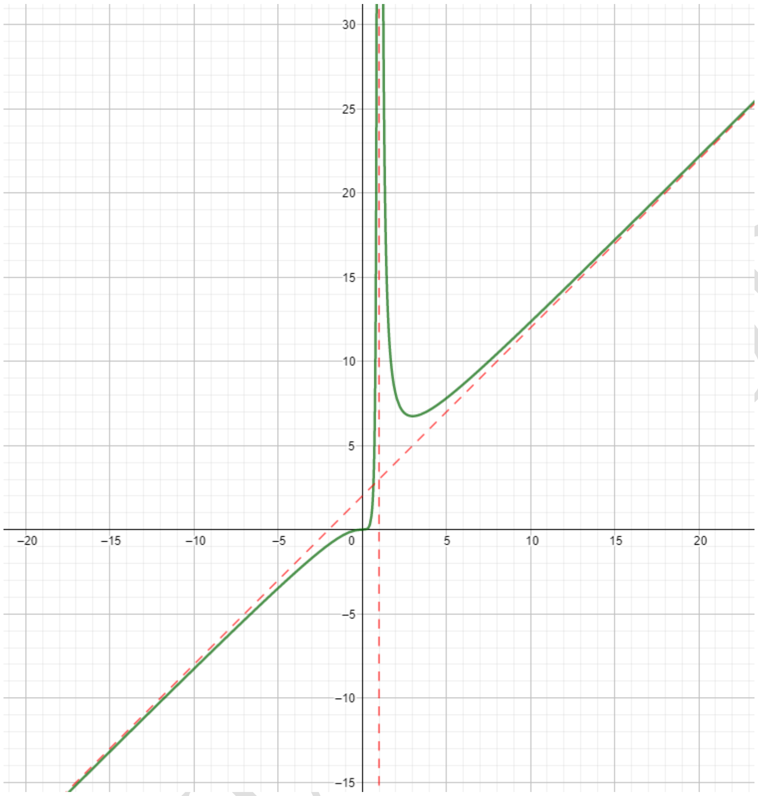
f´´ (x) = $\frac{6x}{(x-1)^4}$

f´´ (-1)	f´´ ($\frac{1}{2}$)	f´´ (2)
-	+	+

0 1

(0,0) punto de inflexion

- **Gráfica:**



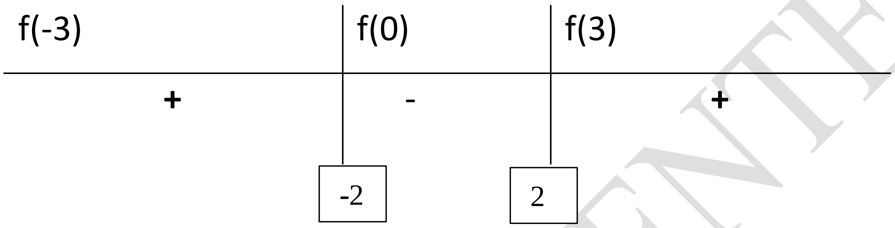
3. f (x) = $\frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{x+2}}$

- **Dominio** = $\mathbb{R} - \{-2\}$

- **Cortes con los ejes y signo:**

Eje x = $\frac{2x-4}{x+2} = 0$ → 2x – 4 = 0 → 2x = 4 → x = 2 (2,0) f (2) = 0

Eje y: f (0) = -2 → (0, -2)



- **Asíntotas**

Verticales $\lim_{x\to -2} \frac{2x-4}{x+2} = \frac{-8}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ tiene en x = -2

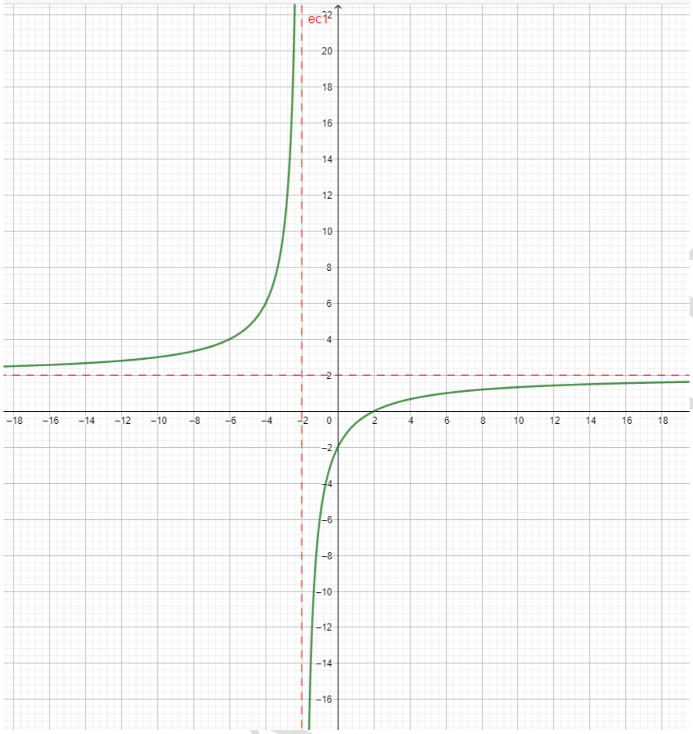
Horizontales $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{1} = 2$ tiene en y = 2 $\begin{cases} \lim_{x\to -\infty} f(x) > 0 \; Por \; encima \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) < 0 \; Por \; debajo \end{cases}$

Oblicuas: no tiene al tener horizontal

Ramas infinitas: no tiene al tener horizontal

- Deja de tener perdida en el segundo año (corte con el eje x, en x = 2)
- Si, están limitadas en 200.000 euros (por la asíntota horizontal en y = 2)

- Gráfica:



4. f(x) = $\boldsymbol{\frac{x^2+1}{x-1}}$

m = $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1} : x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-x}\right] = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1$

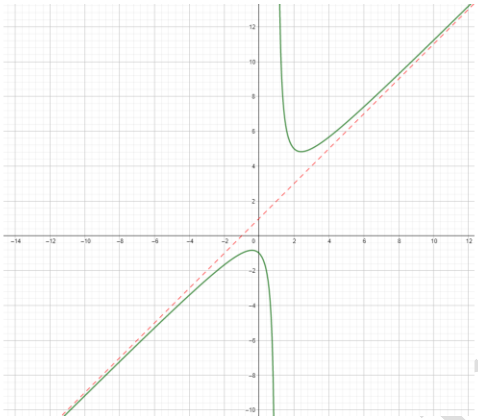
n = $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x+1}{x-1}\right] = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1$

y = x + 1

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$ → Se acerca por encima

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$ → Se acerca por debajo

- **Gráfica:**



5. g(x) = $\boldsymbol{\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}2x^2 + 6x + 1}$

f´(x) = $\frac{3}{2}\ x^2\ + \frac{10}{2}\ x\ +\ 6$

$\frac{3}{2}\ x^2\ + \frac{10}{2}\ x\ +\ 6$ = 0 → $3x^2\ +\ 10x\ +\ 12\ =\ 0$

No tiene máximos ni mínimos

X = $\frac{-10 \pm \sqrt{100-144}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{-44}}{6}$ = ∄

f´´ (x) = $\frac{6}{2}x\ +\ 5$ → 3x + 5 = 0 → 3x = -5 → x = $-\ \frac{5}{3}$

f´´ (-2)	$-\frac{5}{3}$	f´´ (0)
- ∩		+ ∪

Punto de inflexión en x = $-\ \frac{5}{3}$

f ($-\ \frac{5}{3}$) = $-\ \frac{118}{27}$ ($-\ \frac{5}{3}$, $-\ \frac{118}{27}$)