ACTIVIDADES TEMA 1 MATRICES

OPERACIONES CON MATRICES

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula.
   a. A + B
   b. A – B
   c. A – 2B
   d. 2A + 3B

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

d) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 6 \\ 16 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

2. Sean las matrices A_{2x3}, B_{6x2}, C_{3x4} y D_{4x3}. Determina la dimensión de estas matrices.
   a. A . C
   b. A^t . B^t
   c. C . D
   d. B . A
   e. C^t . A^t . B^t
   f. (C^t + D) . A^t

a) 2 x 4
b) 3 x 6
c) 3 x 3
d) 6 x 3
e) 4 x 6
f) 4 x 2

3. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *calcula*
   a. A . B
   b. B^t . A
   c. A^2

a) A . B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) B^t . A = $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) A^2 = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4. Se consideran las siguientes matrices:

A = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) A . B . C
b) A . C^t + B
c) B^t . A – C
d) B . C . A
e) A^t . C^t
f) B^t . C^t

a) A . B . C = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 14 \\ 76 & -34 \end{pmatrix}$

b) A . C^t + B = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -5 \\ 23 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -4 \\ 24 & 3 & 16 \end{pmatrix}$

c) B^t . A – C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 9 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 3 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

d) B . C . A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 13 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -74 \\ -16 & -40 \end{pmatrix}$

e) A^t . C^t = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 9 & -5 \\ -25 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

f) $B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 10 \\ -24 & 0 & -15 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

5. Determina los valores de m para los cuales la matriz $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - 4X + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, donde I es la matriz de identidad.

$X^2 - 4x + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} m^2 - 4m + 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow m^2 - 4m + 1 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcula los valores de m y n para los que se cumple que $(I + A)^3 = mI + nA$, donde I es la matriz de identidad.

$(I + A)^3 = mI + nA \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\right]^3 = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left[\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}\right]^3 = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 17n + m & 29n \\ -10n & -17n + m \end{pmatrix}$

Igualando término a término, se tiene que m = -2 y n = 2.

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{41}

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 + 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n - 1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n - 2 + 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

$A^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.41 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 82 & 1 \end{pmatrix}$

8. Encuentra las matrices A y B cuadrades de orden 2 que cumplan que:
   a. Su suma es la matriz identidad de orden 2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b. Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Despejando en la primera ecuación:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

9. Calcula los valores de α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$

La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

La matriz I es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 7,\ \beta = -6$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{101}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 101 & 101 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Sea una matriz M de dos filas y dos columnas tal que verifica que $M^2 = M$. Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple la relación $PM = MP = 0$, siendo 0 la matriz nula de orden 2.

$PM = (I - M) . M = IM - M^2 = M - M = 0$

$MP = M . (I - M) = MI - M^2 = M - M = 0$

Así, resulta: $PM = MP = 0$

12. La siguiente matriz expresa los precios unitarios, en euros, de cuatro artículos A, B, C y D procedentes de las fábricas F_1 , F_2 y F_3.
Si un pedido es representado por una matriz fila $C = (x\ y\ z\ t)$, ¿Qué representa cada uno de los elementos del resultado del producto CP? Si queremos comprar 25 unidades de A, 30 de B, 60 de C y 75 de D, ¿cuál de las fábricas nos ofrece mejor precio?

La matriz resultado es de dimensión 1×3, donde cada elemento representa lo que cuestan en total todos los productos en cada fábrica.

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 60 & 75 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4435 & 4435 & 5680 \end{pmatrix}$$

13. Halla las matrices de la forma A = $\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ tales que: A . A^t = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

A . A^t = $\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ xy = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases}$

- Si y = 2, entonces x = -1 → A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- Si y = -2, entonces x = 1 → A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$